فصل [redacted] : شمردن بدون شمارش

تعریف اصل ضرب : فرض کنید که یک کار را بتوان با دو عمل پیاپی A و B انجام داد. اگر عمل A به m طریق و به دنبال آن عمل B به n طریق قابل انجام باشد آنگاه کل کار به $\underline{m \times n}$ طریق قابل انجام است.

تعریف اصل جمع : فرض کنید که یک کار را بتوان با دو عمل $\underline{A \text{ یا } B}$ به طور کامل انجام داد به طوری که این دو عمل نتوانند همزمان اتفاق بیفتند آنگاه کل کار به $\underline{m+n}$ طریق قابل انجام است.

تفاوت اصل جمع و ضرب در این است که در اصل ضرب هر قسمت باید به طور کامل انجام شود تا کل کار انجام شود ولی در اصل جمع در هر قسمت کار به طور کامل انجام می شود.

نکته : به حذف ج در اصل ضرب و حذف یا در اصل جمع توجه شود.

مثال : در هر یک از حالات زیر تعداد اعداد سه رقمی بدون تکرار ارقام که با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ می توان نوشت را بدست آورید.

الف) اعداد فرد باشند   ب) اعداد بزرگتر از ۳۲۰ باشند

ج) اعداد زوج باشند.

حل : قسمت الف) چون عدد فردی خواهیم ابتدا رقم یکان به ۳ طریق (ارقام ۱ و ۳ و ۵) قابل انتخاب است. سپس سراغ رقم صدگان می رویم که به غیر از صفر و رقم یکان انتخاب شده ، ۴ حالت دارد.

در آخر رقم دهگان نیز ۴ حالت دارد. پس طبق اصل ضرب :

عدد سه رقمی ← ۴ ۴ ۳ $\Longrightarrow$ جواب = ۴×۴×۳ = ۴۸

قسمت ب) این اعداد به دو صورت می باشند. اعدادی که رقم صدگان آن ها ۴ یا ۵ است که در این صورت عدد حتماً از ۳۴۰ بزرگتر است. تعداد این اعداد به صورت زیر است:

[۴ یا ۵] [ ] [ ]

۲ ۵ ۴ ⟸ ۲×۵×۴=۴۰

یا اعدادی که رقم صدگان آن ها ۳ است. که در این صورت رقم دهگان باید فقط ۴ یا ۵ باشد.

[۳] [۴ یا ۵] [ ]

۱ ۲ ۴ ⟸ ۱×۲×۴=۸

پس طبق اصل جمع جواب نهائی برابر است با: ۴۰+۸=۴۸

قسمت ج) برای بدست آوردن اعداد زوج کافی است تعداد کل اعداد سه رقمی بدون تکرار ارقام را از جواب الف کم کنیم.

کل اعداد سه رقمی بدون تکرار با رقم های ۰ تا ۵ = ۵×۵×۴=۱۰۰ ⟸ تعداد اعداد زوج = ۱۰۰−۴۸=۵۲

مثال : به چند طریق می توان از بین ۴ دانشجوی مکانیک و ۵ دانشجوی برق ۲ دانشجو را انتخاب کرد به طوری که نفر اول سرگروه و نفر دوم معاون باشه و هر دو از یک رشته باشند ؟

حل : یا هر دو از رشته مکانیک هستند و یا هر دو از رشته برق هستند.
چون حرف « یا » آمده است باید اصل جمع استفاده شود.

حالتی که هر دو دانشجو مکانیک باشند $= \underset{\text{سرگروه}}{4} \times \underset{\text{معاون}}{3} = 12$

حالتی که هر دو دانشجو برق باشند $= \underset{\text{سرگروه}}{5} \times \underset{\text{معاون}}{4} = 20$

اصل جمع $= 12 + 20 = 32$

تعریف جایگشت : به هر ترتیبی که می توان تعدادی اشیاء یا افراد را در کنار یکدیگر قرار داد طوری که ترتیب اهمیت دارد یک جایگشت گویند.

مثال : جایگشت ها و تعداد جایگشت های مختلف سه حرف a و b و c را بدست آورید.

حل : جایگشت ها مختلف این سه حرف به صورت زیر است :

abc - acb - bac - bca - cab - cba ⟶ $\boxed{\text{تعداد} = ۶}$

تعداد این جایگشت ها که ۶ تا است را می توان به صورت زیر با اصل ضرب حساب کرد:

جایگاه اول	جایگاه دوم	جایگاه سوم
۳	۲	1

⟹ ۳×۲×۱=۶

تعریف فاکتوریل : علامت فاکتوریل به صورت (!) است و اگر n یک عدد باشد n فاکتوریل یعنی $n!$ برابر است با :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

مثال : $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

نتیجه : اگر n شیء متمایز را بخواهیم کنار یکدیگر قرار دهیم تعداد جایگشت‌ها این n شیء برابر است با :

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!$$

قرارداد می‌کنیم که $0!$ برابر است با یک.

همچنین $n!$ را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$n! = n \times (n-1)! \longrightarrow$ مثال : $8! = 8 \times 7! = 8 \times 7 \times 6!$

مثال : چهار پزشک و پنج مهندس می خواهند در یک صف کنار یکدیگر قرار گیرند.

الف) به چند طریق مهندس ها در یک طرف صف و پزشک ها در طرف دیگر صف قرار می گیرند.

حل الف) پزشک ها به !۴ و مهندس ها به !۵ حالت می توانند کنار هم قرار گیرند. چون شروع صف می تواند با پزشک ها یا مهندس ها باشد پس جواب طبق اصل ضرب $\boxed{۲ \times ۴! \times ۵!}$ است.

ب) به چند طریق پزشک ها و مهندس ها یک در میان قرار می گیرند؟

حل ب) : در این حالت چون تعداد مهندس ها بیشتر است باید اول صف حتماً با پزشک شروع شود. بنابراین مانند قسمت الف مقدار ۲ را نداریم و جواب برابر است با : $\boxed{۴! \times ۵!}$

ج) به چند طریق دو مهندس به خصوص همواره کنار هم قرار می گیرند؟

حل ج): دو مهندس به خصوص را M_1 و M_2 می نامیم. این دو به ② حالت می توانند کنار هم باشند $(M_1M_2 - M_2M_1)$. با در نظر گرفتن این دو مهندس به عنوان یک نفر در کل $\underline{8}$ نفر بدست می آید ($\underline{4}$ پزشک و $\underline{4}$ مهندس) که این $\underline{8}$ نفر به $\underline{8!}$ می توانند کنار هم قرار بگیرند. پس طبق اصل ضرب

$$\text{جواب} = 2 \times 8!$$

تعریف جایگشت r شیء از n شیء: اگر از بین $\underline{n}$ شیء متمایز بخواهیم $\underline{r}$ شیء را انتخاب کرده و در یک صف کنار هم قرار دهیم این کار به تعداد $\frac{n!}{(n-r)!}$ طریق قابل انجام است.

توجه : $\frac{n!}{(n-r)!}$ را با P_r^n نیز نمایش می دهند و به آن جایگشت r شیء
از n شیء گویند

مثال : با حروف کلمه computer چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت ؟

حل : تعداد حروف کلمه computer برابر با $\boxed{n=8}$ است و در این جا
$\boxed{r=5}$ می باشد زیرا می خواهیم کلمه ۵ حرفی بسازیم . پس جواب
برابر است با :

$$P_5^8=\frac{8!}{(8-5)!}=\frac{8!}{3!}=\frac{8\times7\times6\times5\times4\times\cancel{3!}}{\cancel{3!}}=8\times7\times6\times5\times4$$
$$=6720$$

جایگشت با عناصر تکراری :

اگر n شیء داشته باشیم ولی همه متمایز نباشند بلکه n_1 تای آن ها از نوع اول و n_2 تای آن ها از نوع دوم و ... و n_k تای آن ها از نوع k اُم باشند. در این صورت تعداد جایگشت های این n شیء برابر است با :

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_k!}$$

مثال : تعداد جایگشت های مختلف حروف کلمه ~~...~~ PEPPER چند تا است؟

حل : این کلمه از ۶ حرف ساخته شده است اما ۳ تای آن ها مثل هم یعنی P ، ۲ تای آن ها مثل هم یعنی E و یکی تنها یعنی R است. پس

$$\text{جواب} = \frac{6!}{3! \times 2! \times 1!}$$

ترکیب : اگر از بین n شیء متمایز بخواهیم r شیء را انتخاب کنیم به طوری که ترتیب انتخاب و کنار هم بودن اهمیت نداشته باشد در این صورت تعداد حالت های انجام این کار برابر است با :

$$\frac{n!}{(n-r)! \times r!}$$

$\frac{n!}{(n-r)! \times r!}$ را با $\binom{n}{r}$ نشان می دهند یا همچنین با C_r^n و به آن ترکیب r شی از n شی گویند.

مثال : از بین 4 پزشک و 3 پرستار می خواهیم یک کمیته پزشکی 4 نفره تشکیل دهیم.

الف) در چند حالت اعضای کمیته شامل 2 پزشک و 2 پرستار می باشند

ب) در چند حالت اعضای کمیته شامل حداقل 2 پرستار است.

حل الف) واضح است که ترتیب افراد اهمیتی ندارد و فقط اعضای کمیته مهم هستند.

انتخاب ۲ پزشک به $\binom{4}{2}$ و انتخاب ۲ پرستار به $\binom{3}{2}$ حالت انجام می‌شود

درنهایت طبق اصل ضرب جواب برابر است با:

$$\binom{4}{2}\times\binom{3}{2}=\frac{4!}{(4-2)!\ 2!}\times\frac{3!}{(3-2)!\times 2!}=\frac{4!}{2!\ 2!}\times\frac{3!}{1!\ 2!}$$

$$=6\times 3=18$$

حل ب) حداقل دو پرستار یعنی ۲ پرستار و بیشتر. چون تعداد کل پرستارها ۳ تا است. پس حداقل دو پرستار یعنی ۲ پرستار یا ۳ پرستار.

حالت‌های ۲ پرستار و ۲ پزشک $=\binom{3}{2}\binom{4}{2}$

حالت‌های ۳ پرستار و ۱ پزشک $=\binom{3}{3}\binom{4}{1}$

$$\xrightarrow{\text{اصل جمع}}\binom{3}{2}\binom{4}{2}+\binom{3}{3}\binom{4}{1}$$

یک کاربرد ترکیب: تعداد جواب ها صحیح و غیر منفی معادله $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$

که در آن هر x_i یک عدد صحیح و غیر منفی است یعنی $\boxed{x_i \geq 0}$ است برابر

است با: $\binom{n+r-1}{n-1}$

مثال: ۵ سکه مشابه را می خواهیم بین ~~۵~~ ۳ نفر تقسیم کنیم به چند طریق می توان

این کار را انجام داد؟

حل: قرار می دهیم:

$x_1 =$ تعداد سکه ها فرد اول

$x_2 =$ 〃 〃 〃 دوم

$x_3 =$ 〃 〃 〃 سوم

در این صورت هر $\boxed{x_i \geq 0}$ است و به علاوه

چون تعداد سکه ها ۵ تا است پس باید

$x_1+x_2+x_3=5 \longrightarrow \boxed{n=3}$ و $\boxed{r=5}$

و جواب: $\binom{3+5-1}{5-1}$

$\binom{7}{4}$